中原工学院

Zhongyuan University of Technology

5　机械振动

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

大学物理（上）

5　机械振动

5.3 简谐运动的能量

孤立谐振动系统的能量

不计振动传播带来的能量损失 —— 辐射阻尼

不计摩擦产生的热损耗 —— 摩擦阻尼

以水平放置的弹簧振子为例

以平衡位置为坐标原点
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = 恒量$$

讨论:

$$\boxed{E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}kA^2 = \text{恒量}}$$

1. $\boldsymbol{E}$ **不随时间变化，孤立谐振系统机能守恒**

2. 对同一个弹簧振子， $\boldsymbol{k}$ **不变,** $E \propto A^2$

3. $\boldsymbol{E_{\mathrm{k}}}$ **,** $\boldsymbol{E_{\mathrm{p}}}$ **周期性变化:** $E \propto A^2$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\boldsymbol{E_{\mathrm{k}}}$ **,** $\boldsymbol{E_{\mathrm{p}}}$ **变化频率为** $\boldsymbol{x}$ **的 2 倍**

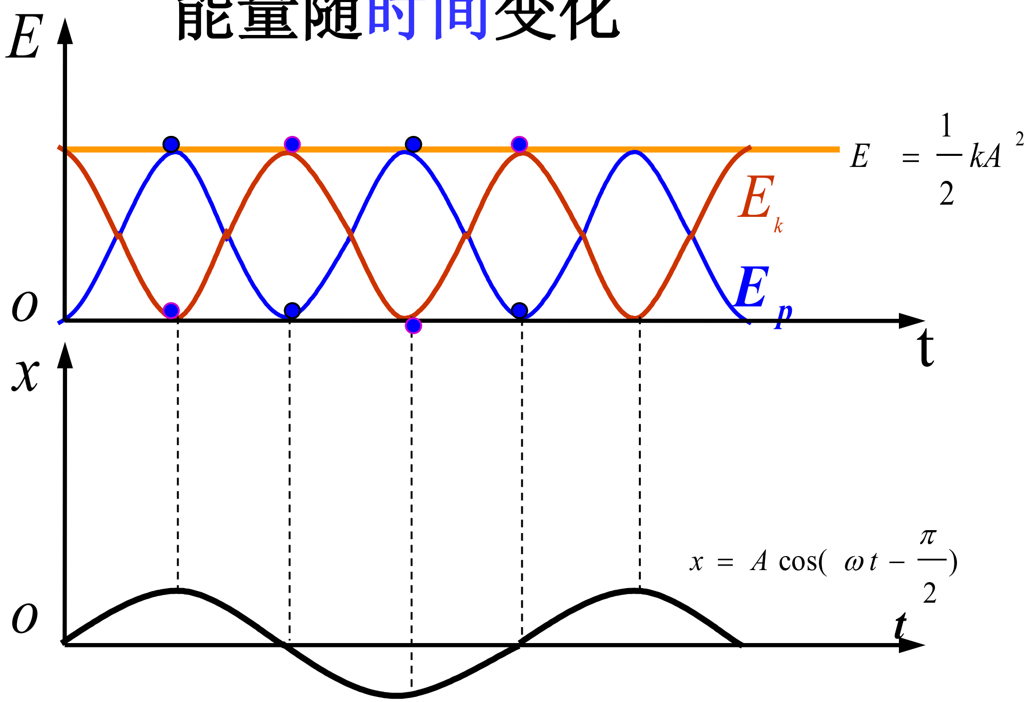
$\boldsymbol{E_{\mathrm{k}}}$ **,** $\boldsymbol{E_{\mathrm{p}}}$ **彼此变化步调相反**

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

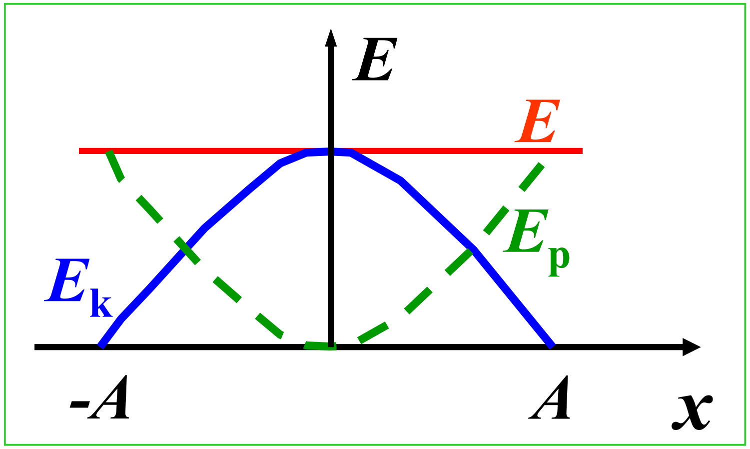
E–t 曲线

能量随时间变化



E –x 曲线

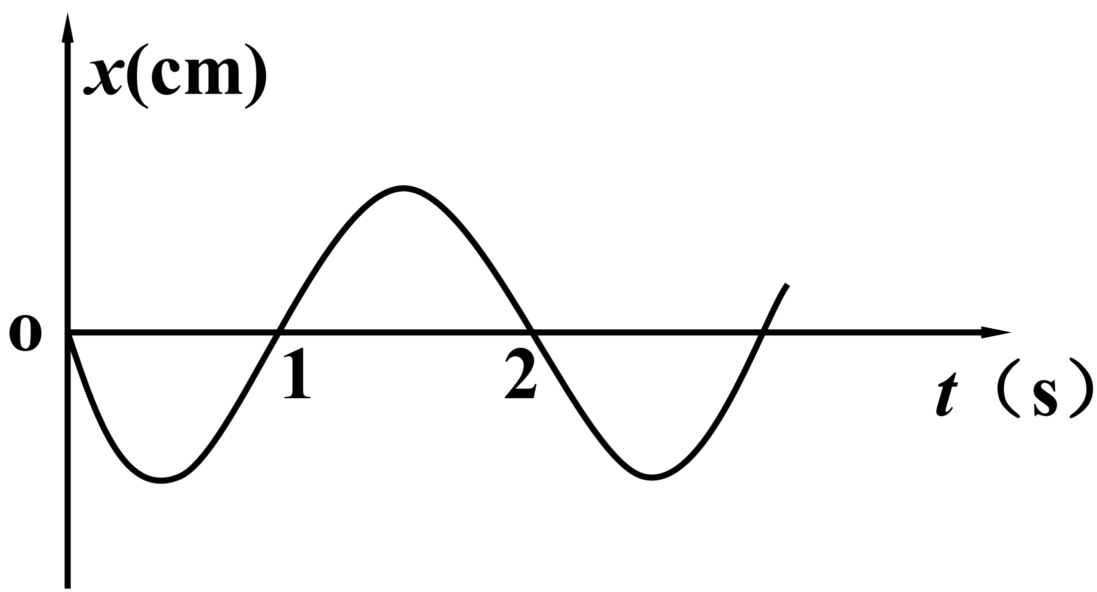
能量随空间变化



例 已知一谐振动曲线如图所示，由图确定：

（1）在 $k+1/2$ s时速度为零　　（2）在 k s时动能最大

（3）在 $2k+1/2$ s时加速度取正的最大值



例 质量为 $0.10\ \mathrm{kg}$ 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，**求**：

（1）振动的周期；（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；（4）物体在何处其动能和势能相等？

解：

$$a_{\max}=A\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{a_{\max}}{A}}=20\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\ \mathrm{s}$$

$$E_{\mathrm{k,max}}=\frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$T = 0.314\ \mathrm{s} \qquad E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（3）总能量；

$$E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（4）物体在何处其动能和势能相等？

$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $\qquad E_{\mathrm{p}} = 1.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \qquad x = \pm 0.707\ \mathrm{cm}$$

例一弹簧振子的振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (SI)。设弹簧的弹性系数为 k，求：

(1)当 $x = \frac{A}{2}$ 时，系统的总能量、动能和势能；

(2)物体在什么位置，系统的动能与势能相等。

解: (1)对弹簧振子，系统总能量为 $E = \frac{1}{2}kA^2$

在 $x = \frac{A}{2}$ 时，系统势能为 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{8}kA^2 = \frac{E}{4}$

系统动能为 $E_k = E - E_p = \frac{3E}{4} = \frac{3}{8}kA^2$

(2)设在 x_a 处系统动能与势能相等

$$\frac{1}{2}kx_a^2 = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2 \qquad \therefore x_a = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

大学物理（上）

5　机械振动

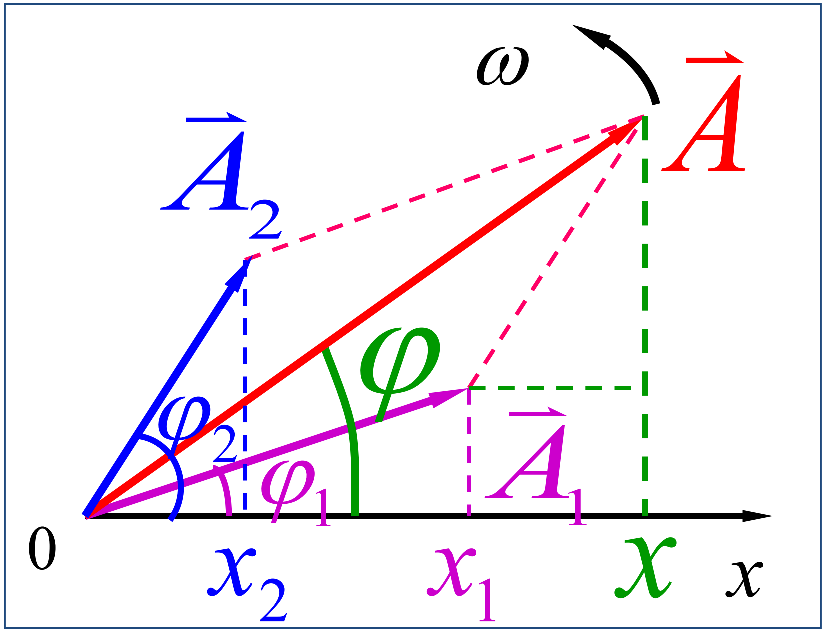
5.4 简谐运动的合成

一　两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$　（数学运算？）

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

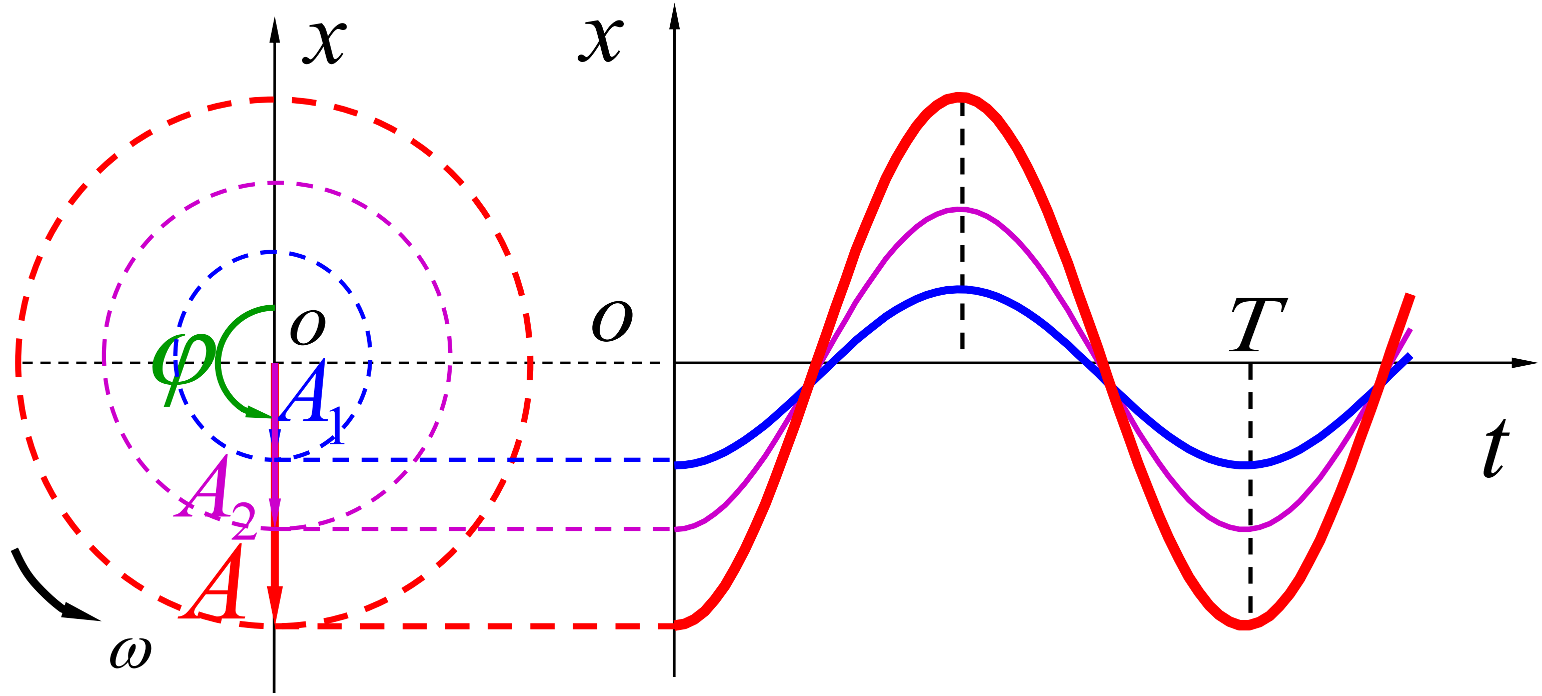


$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

讨论: $$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

1）相位差 $\boldsymbol{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi}$ （同相、同步）



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

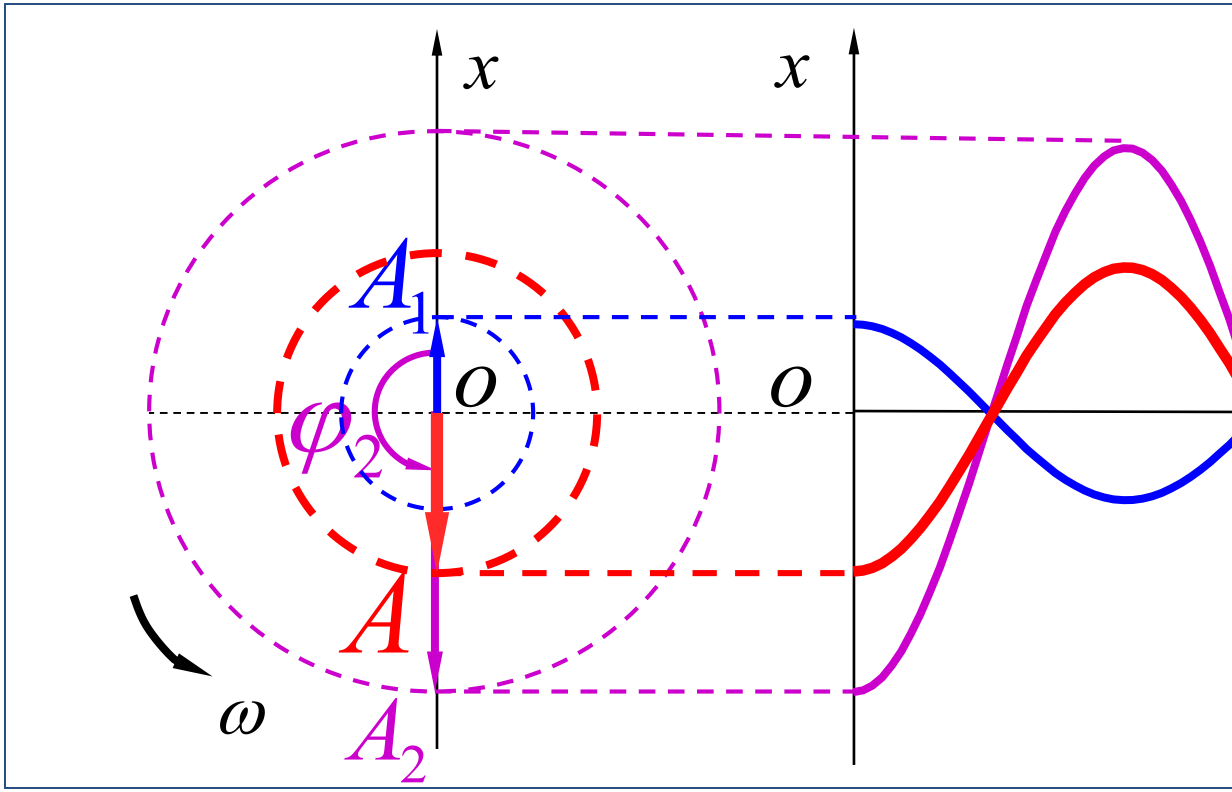
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$（反相、异步）

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



$$\begin{cases} A=\left|A_1-A_2\right| \\ \varphi=\varphi_2 \end{cases}$$

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}}$$

相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

1）相位差 $\Delta\varphi=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

相互加强

2）相位差 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

相互削弱

3）一般情况

$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

例 已知两个同方向的简谐振动：

$$x_1 = 0.04\cos(10t + \pi/3),$$

$$x_2 = 0.03\cos(10t + \varphi)$$

则（**1**） $x_1 + x_2$ 为最大时，φ 为 $\underline{2k\pi + \pi/3}$

（**2**） $x_1 + x_2$ 为最小时，φ 为 $\underline{2k\pi + 4\pi/3}$

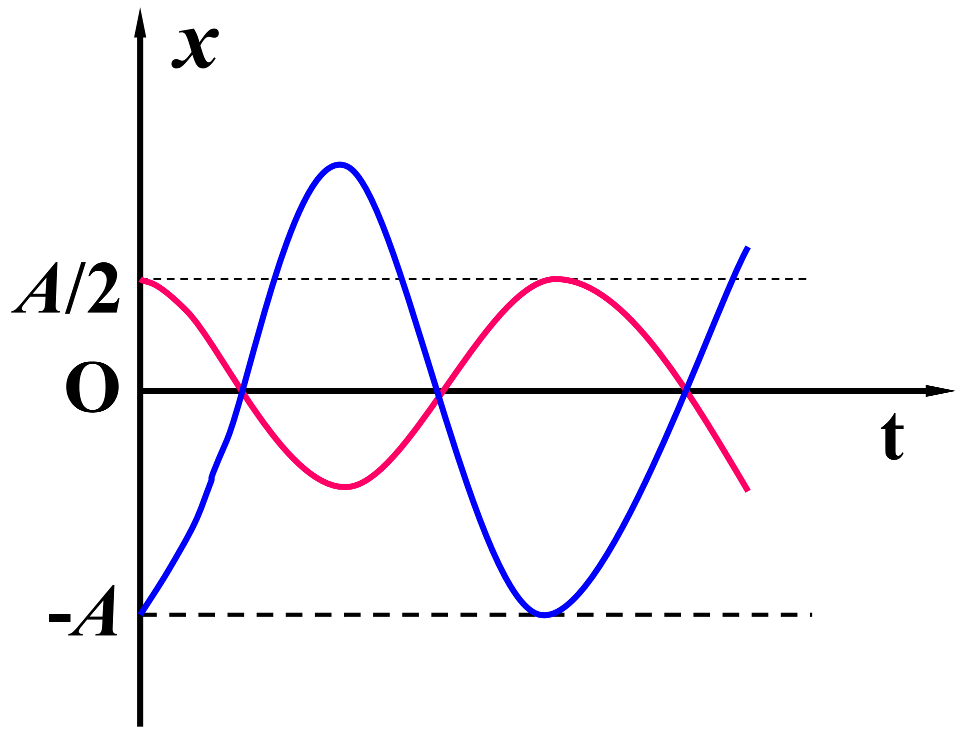
例 图中所画的是两个简谐振动的振动曲线．若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

（1） $3\pi/2$

（2） π

（3） $\pi/2$

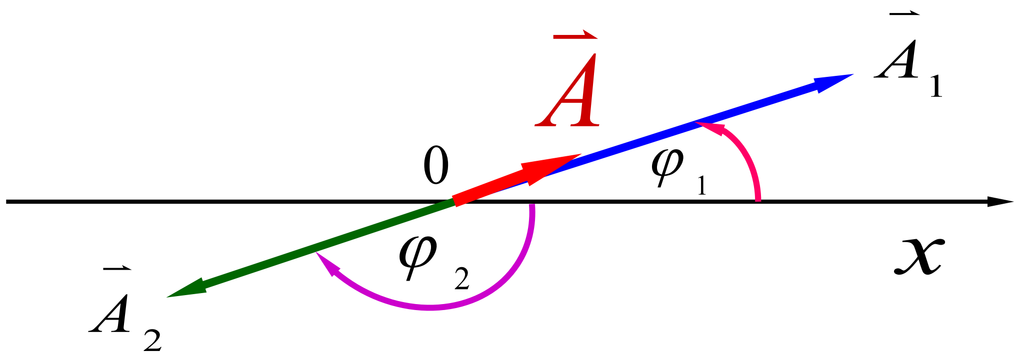
（4） 0



例 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，求合振动的振幅和初相位。

$$x_1 = (4\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\,\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$

$$x_2 = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\,\mathrm{s}^{-1}t - 5\pi/6)$$



$$\Delta\varphi = \pi \qquad A = 1\times10^{-2}\,\mathrm{m} \qquad \varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

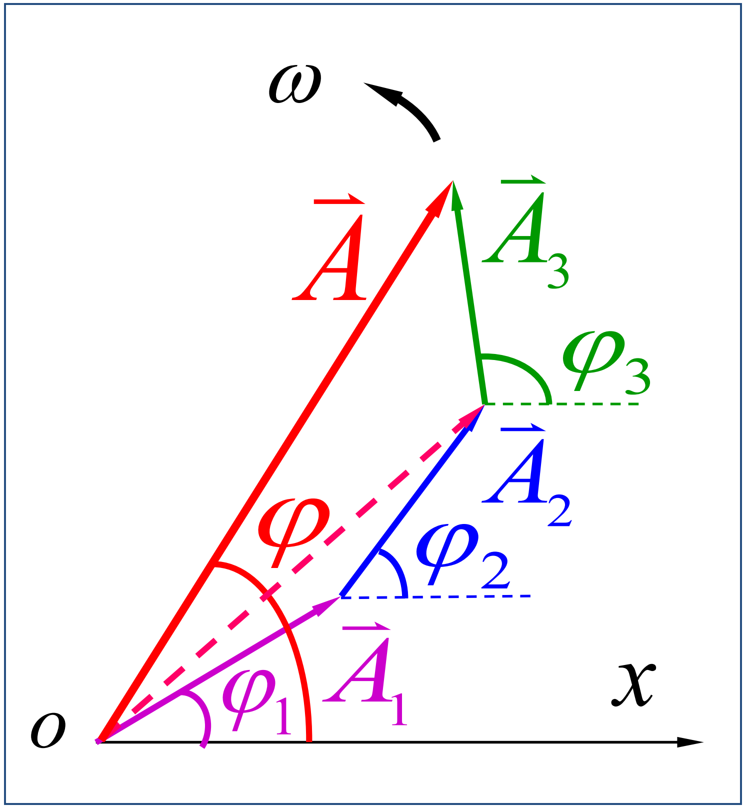
$$x = (1\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\,\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$

* 二　多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\ \cdots \\ x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

* 三　两个同方向不同频率简谐运动的合成 拍现象

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

四　两个相互垂直的同频率简谐运动的合成

两个振动 $\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

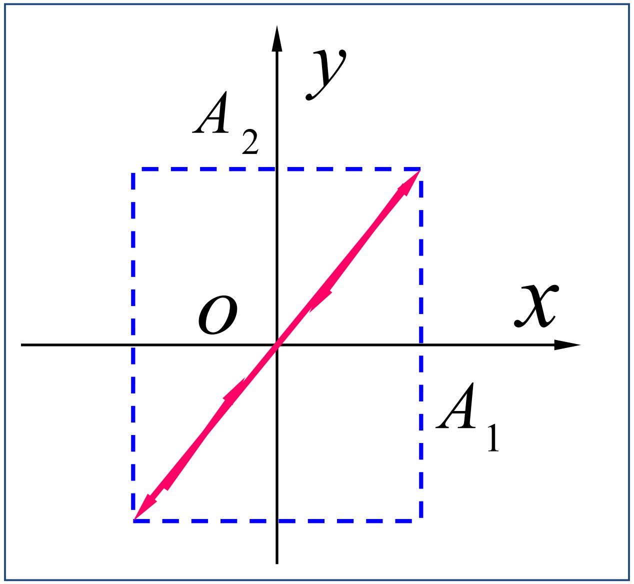
合振动　　质点运动轨迹　　　（椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

讨论: 1) $\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$



合振动的轨迹为通过原点且在第一、第三象限内的直线

斜率 $\frac{A_2}{A_1}$

质点离开平衡位置的位移 $S=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

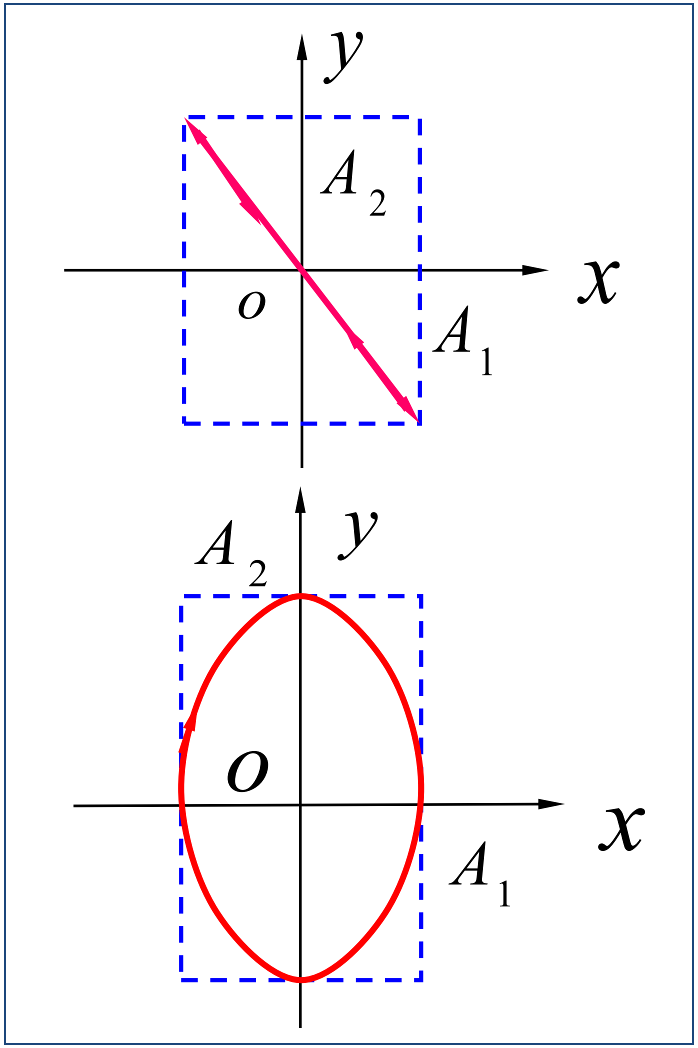
2） $\varphi_2-\varphi_1=\pi \qquad y=-\frac{A_2}{A_1}x$

合振动的轨迹为通过原点且在第二、第四象限内的直线

3） $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

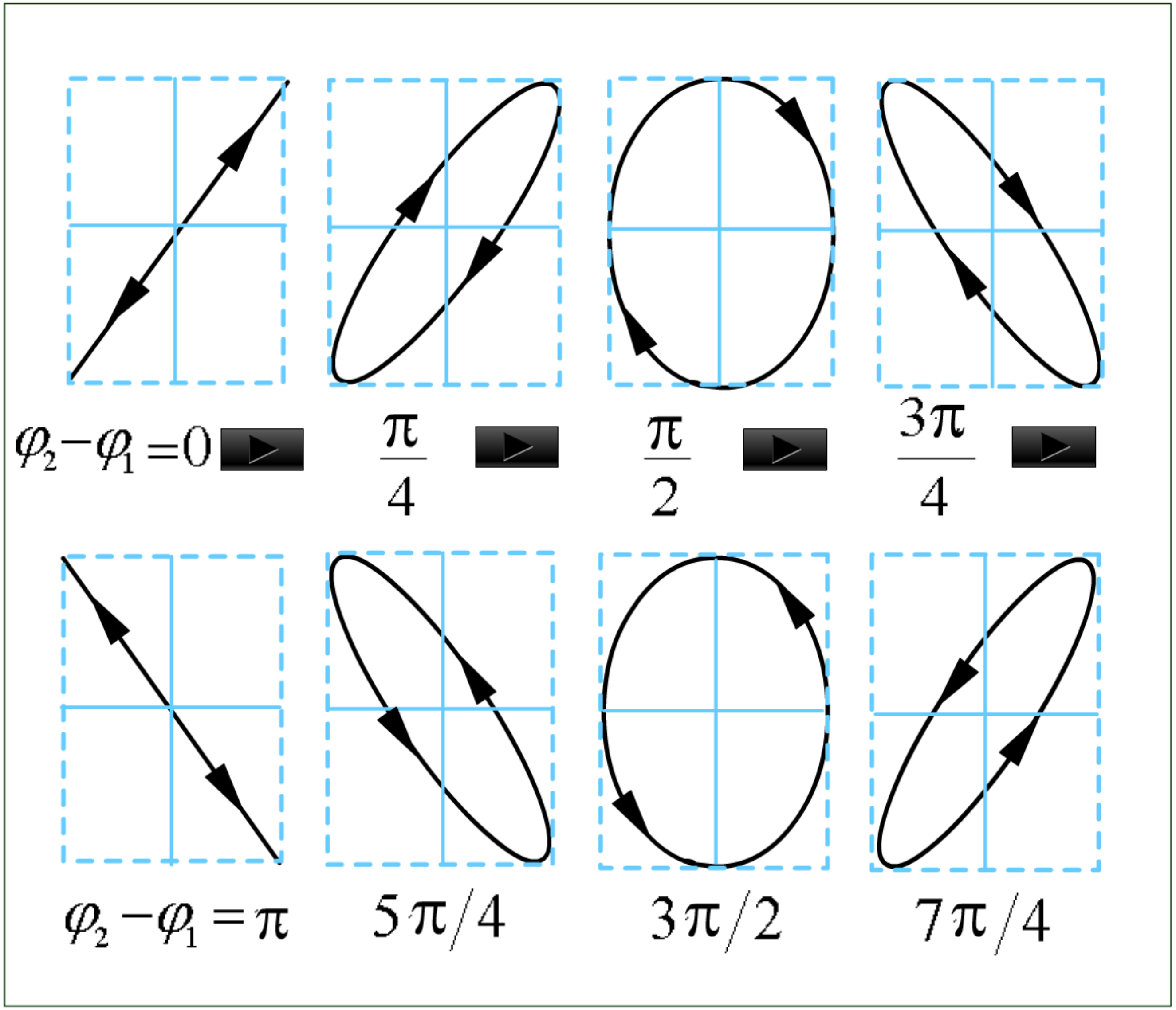
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

合振动的轨迹为以 x 轴和 y 轴为轴线的椭圆



两相互垂直同频率不同相位差

简谐运动的合成图



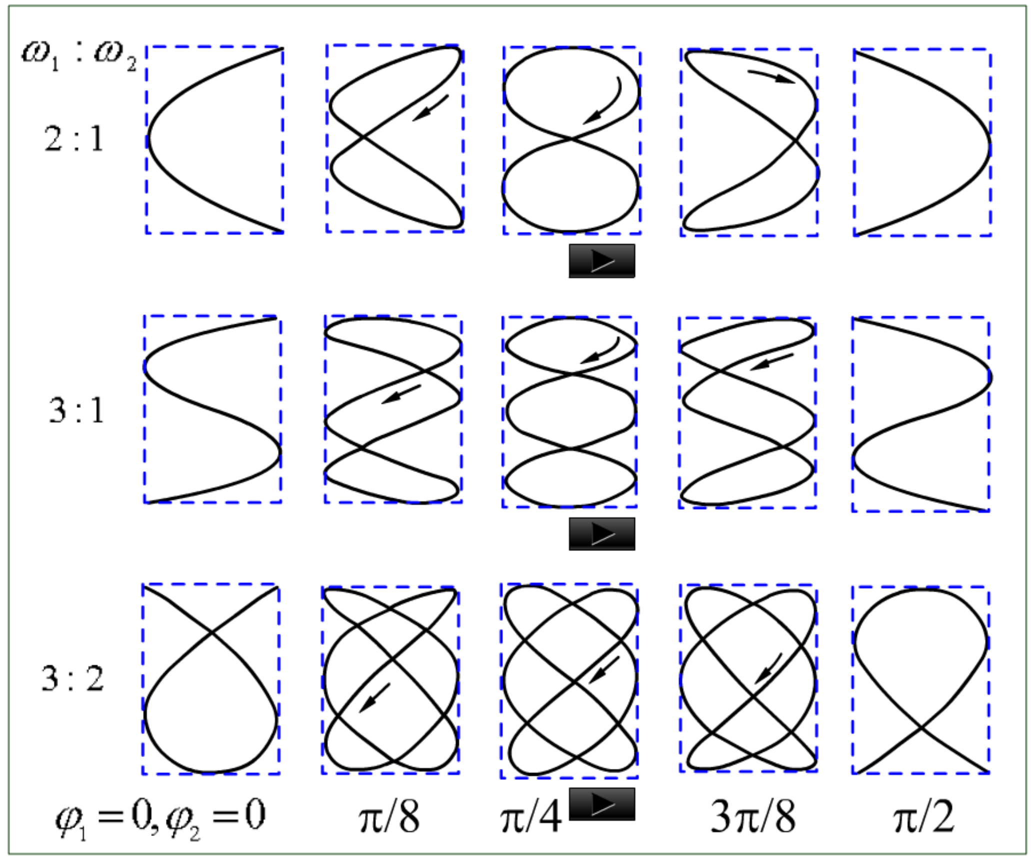
五　两相互垂直频率成简单整数比的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$$

李 萨 如 图



合运动具有严格的周期性和稳定、封闭的轨道。

——李萨如图形

测量振动频率和相位的方法

课外观看视频

请自行搜索观看：

沙漏单摆演示合成振动轨迹

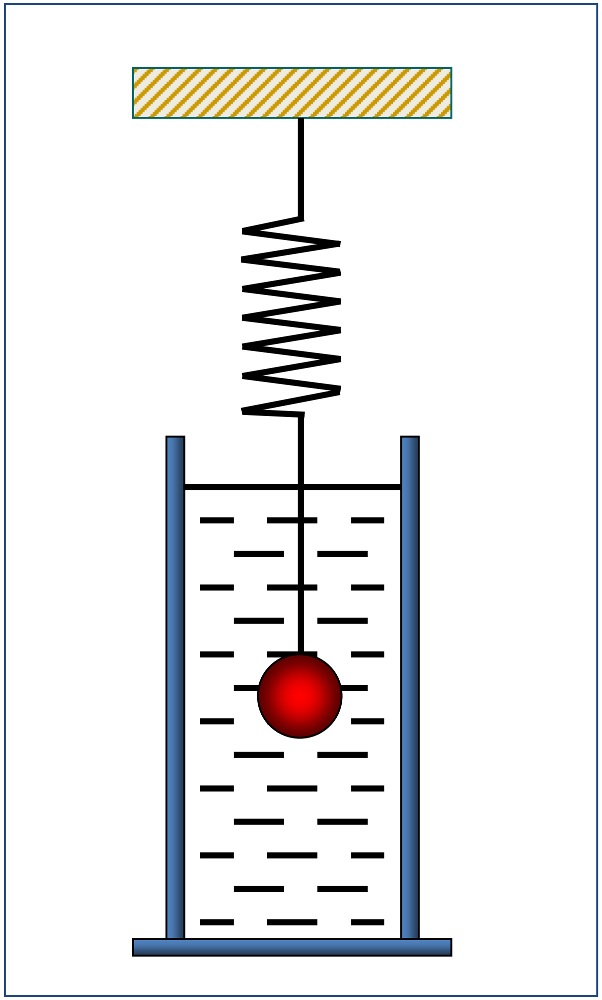
大学物理（上）

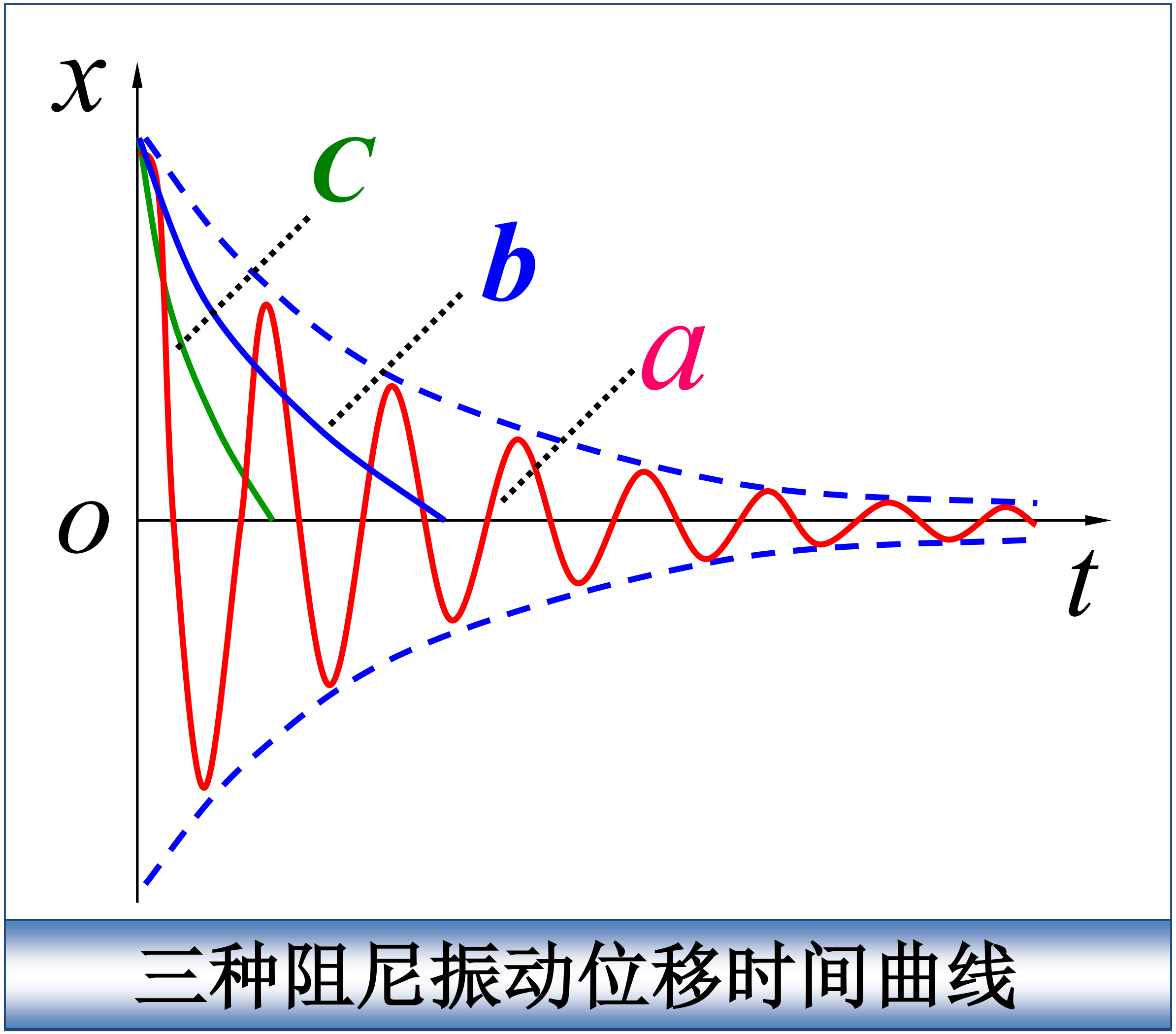
5　机械振动

5.5 阻尼振动 受迫振动 共振

一 阻尼振动

- 欠阻尼
  - 物体在介质中振动，若介质的阻尼不大（如水中），可近似看成振幅逐渐减小的简谐运动.
- 过阻尼
  - 若介质的阻尼很大，物体从开始的最大位移处缓慢地逼近平衡位置，其后静止不动.（恢复到平衡位置刚好一个周期）
- 临界阻尼
  - 物体不能作往复运动的临界情况.





a）欠阻尼　　b）过阻尼　　c）临界阻尼

阻尼模型（力学）

- 粘性阻尼的阻尼力

$$\boldsymbol{f = -cv}$$

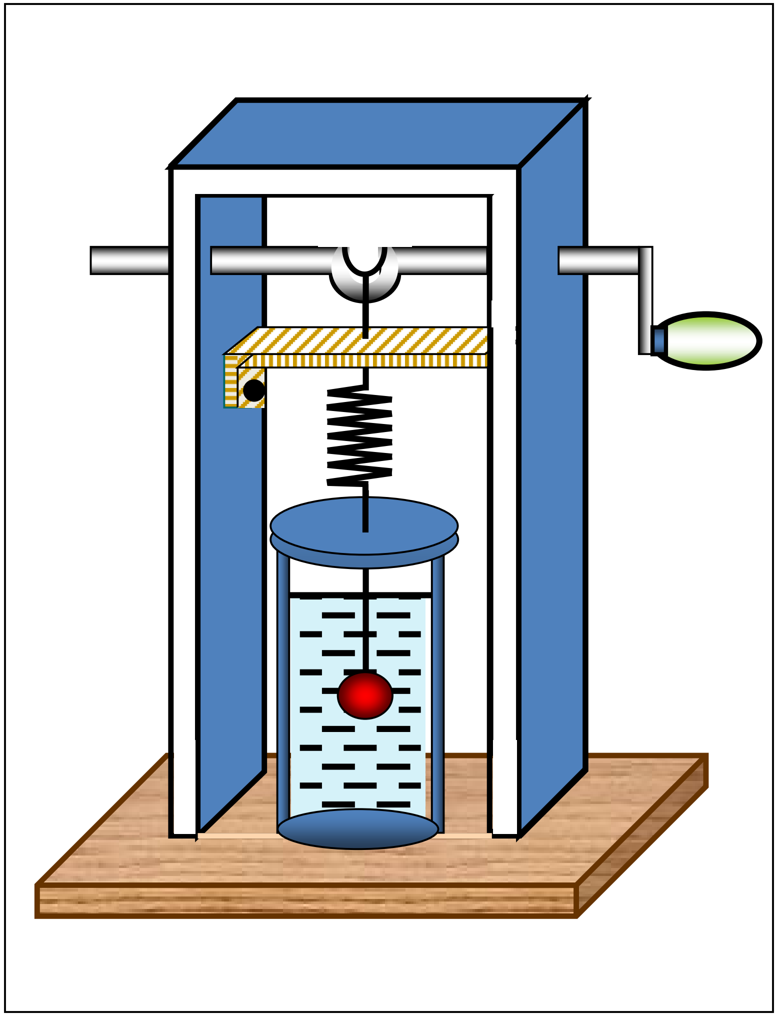
- 其中，
  - $\boldsymbol{c}$ 为阻尼系数，国际单位制单位为牛顿·秒/米；
  - $\boldsymbol{v}$ 为振子运动速度。
- 假设振子不再受到其他外力的作用，动力学特征
  - $\boldsymbol{F = -kx}$
  - $\boldsymbol{f = -cv}$
  - 根据牛顿第二定律，有

$$\boldsymbol{-kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

二　受迫振动

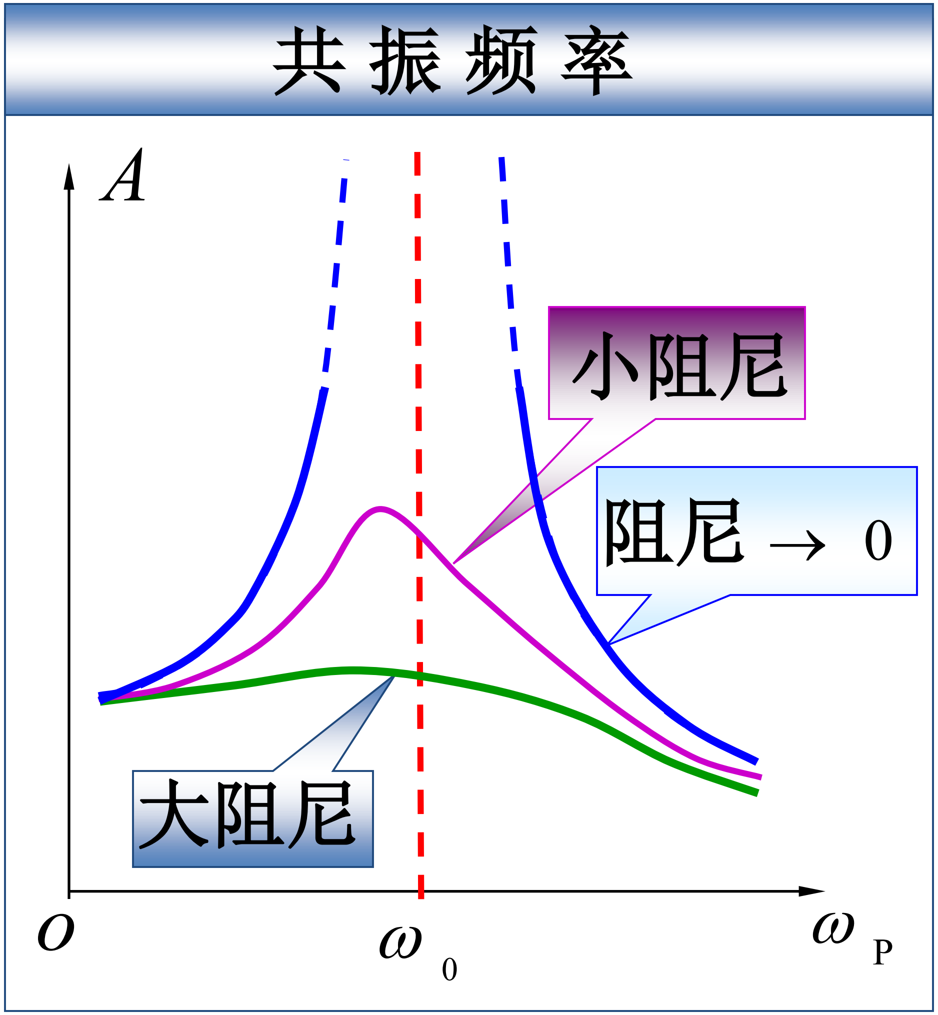
系统在周期性外力作用下所进行的振动叫受迫振动.（如扬声器中纸盆的振动、机器运转时引起基座的振动）

当受迫振动达到稳定后，振动的振幅保持稳定不变.



三　共振

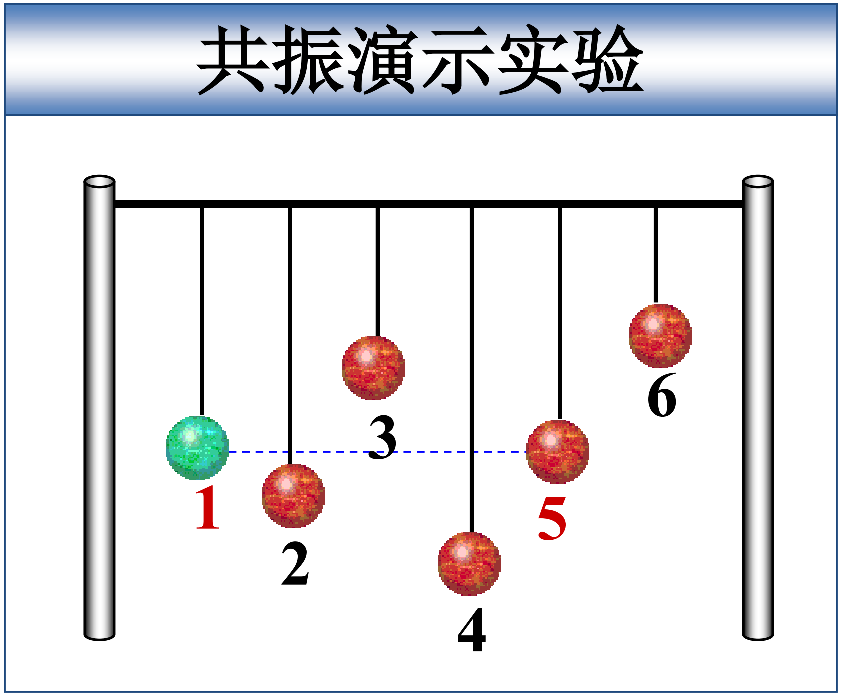
振子在做受迫振动时，当周期性外力的频率与振子的固有频率接近时，振子振幅显著增加, 在某一频率时, 振幅达到最大 ，这一现象称为共振. 达到共振时的频率叫共振频率.



当阻尼趋于零时，共振频率等于系统的固有频率.

共振演示实验

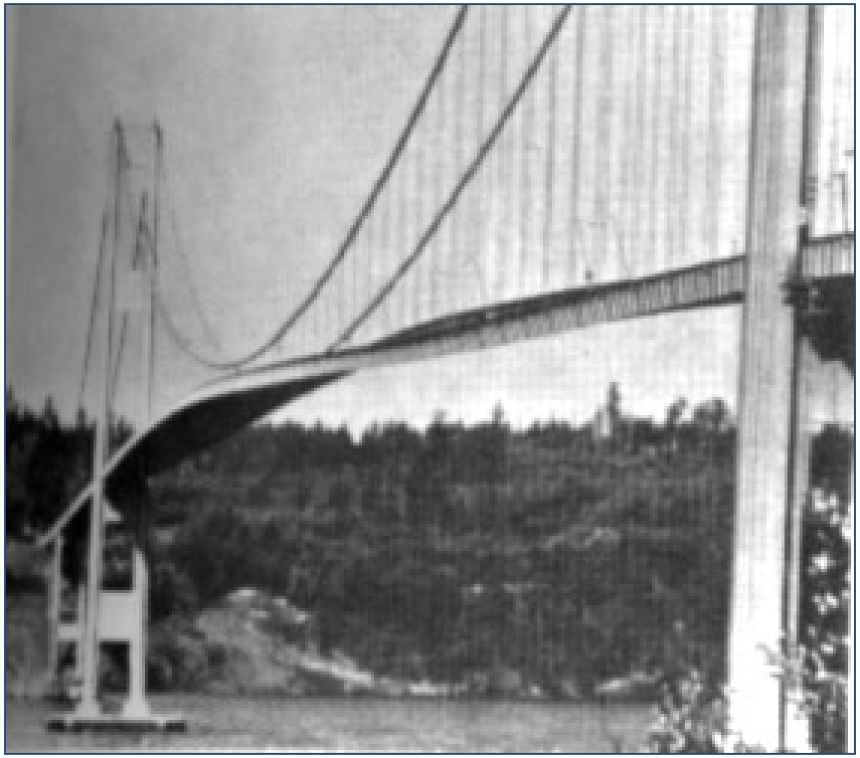
单摆 1 作垂直于纸面的简谐运动时，单摆 5 将作相同周期的简谐运动，其它单摆基本不动.



共振现象在实际中的应用：乐器、收音机……

请自己搜索观看演示共振的相关视频。

共振现象的危害



1940 年11月7日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

例题和练习

作业

- **P136：13；14；19**

版权声明